2012년도 10개 대학들의
수리 논술 교사 문제 분석

사교육걱정없는세상

2012. 8. 17.

2012년 10개 대학들의 대학별 고사 수리 논술 문제 분석

사교육걱정없는세상
(2012. 8. 17.)

1. 목적

논술고사는 대학교육을 이수하기 위하여 기본적으로 요구되는 읽기 능력과 쓰기 능력을 평가하고 대입 평가 제도를 개선하여 중고등학교 교육을 단편적 지식을 기계적으로 암기 하는 교육에서 벗어나 교과목 간의 통합을 통해 생각하고 표현하는 교육으로의 변화를 도모할 수 있는 방안으로서 각광을 받으며 시작되었다.

특히 수리 논술은 그전까지 없었던 생소한 평가형태로서 논리적 사고와 추론 능력 및 수학적 언어를 적절하게 사용하여 서술하는 능력을 평가하는 것을 주된 목적으로 하였다. 시행 초기에는 대학에서 실생활에서의 수학, 수학사를 활용한 수학, 개방적・확산적 사고를 할 수 있는 다양한 수학적 소재가 포함된 문제를 출제 예시 문항으로 공개하였고, 이러한 수리 논술 문제들이 대학입학에 중요한 요소가 된다면 "수학 수업= 문제풀이 수업"이라는 고정관념을 깨고 수업에 다양한 변화가 있을 것이라는 기대감을 갖게 하였다.

하지만, 대학 입시에 대한 관리가 교과부에서 대학교육협의회로 이양된 현 정부 출범 이후 몇몇 대학에서 고등학교 교육과정을 벗어난 대학 수준의 내용에 정해진 풀이과정과 답을 요구하는 본고사 형태의 문제가 출제되기 시작해서 이제는 대부분의 대학에서 이런 문제가 출제되고 있다는 지적이 끊이지 않고 있다. 고등학교 교육과정을 벗어난 대학 수준의 수학 개념과 내용, 복잡한 기호들이 출제됨에 따라 공교육에서 수리 논술을 준비할 수 있는 한계가 있어 수리 논술을 준비하려면 사교육을 받아야 한다는 인식이 확산되고 대학 수준의 내용을 가르치다 보니 가르칠 수 있는 강사가 적어 고가의 대학 내용 선행학습을 시키는 학원들이 늘고 있다. 이러한 상황은 입시를 앞둔 고등학교 학생들과 학부모에게 큰 부담으로 작용하고 있으며, 이런 여파로 2011년 겨울부터 중학생은 물론 초등학생에게도 논술 사교육이 성행하고 있다. 이런 문제점을 지적하는 목소리가 계속되고 있었음에도 불구하고 점점 악화되고 있는 이유는 전문가가 아니면 논술 문항을 이해하고 풀어 구체적으로 어떠한 문제가 있는지 정확하게 지적

하기 어렵기 때문일 것이다.
공교육에서 해결하지 못하고 사교육으로 넘어가면 진정한 학습을 기대하기 어렵다. 영리를 목적으로 하는 사교육의 특성 상 오로지 합격할 수 있는 수단을 확보하는 것에 학습이 치중되게 되고, 결국 부모의 능력에 따라 학생들의 합격이 좌우되는 문제점이 발생한다. 그러므로 사교육에 의존하는 선발은 공정한 선발이라고 볼 수 없으며, 부모의 영향력을 최대한 억제하는 것이 교육의 바른 방향이라 할 수 있다. 부모를 잘 만나는 것이 학생의 성공의 열쇠가 된다면 대학이 진짜 능력 있는 학생들을 선발하고 있는 것인가에 대한 강한 의심을 품지 않을 수 없다.

이에 사교육걱정없는세상 수학사교육포럼에서는 학교에서 수리 논술을 지도한 경험이 있거나 현재 지도 중인 현직 교사 14명과 대학에서 수학을 전공하는 교수의 자문을 얻어 2012년 대입 대학별 수리 논술 모의 문항 및 기출문제를 분석하였으며, 2012 세계수학교육대회(ICME-12)에 참여한 전국 고등학교 수학교사 162명에게 설문조사를 실시하여 최근 수리논술 문제들이 창의적이며 논리적 사고를 평가하고 학교 수학교육의 긍정적인 변화를 유도하고 있는지에 대해 학교 현장의 반응은 어떤지 조사하였다.

2. 분석 대상 학교 및 문제

<table>
<tr><th>대학</th><th>전형</th><th>문항수</th><th>대학별 총 분석 문항수</th></tr>
<tr><td rowspan="2">경희대</td><td>수시2차(토)</td><td>3</td><td rowspan="2">6</td></tr>
<tr><td>수시2차(일)</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">고려대</td><td>수시(오전)</td><td>5</td><td rowspan="2">11</td></tr>
<tr><td>수시(오후)</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">서강대</td><td>수시(화공,컴공)</td><td>8</td><td rowspan="2">14</td></tr>
<tr><td>수시(자연,전자, 기계)</td><td>6</td></tr>
<tr><td>서울대</td><td>정시</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">서울 시립대</td><td>자연A형</td><td>8</td><td rowspan="2">16</td></tr>
<tr><td>자연B형</td><td>8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">성균관대</td><td>수시(자연1)</td><td>4</td><td rowspan="2">8</td></tr>
<tr><td>수시(자연2)</td><td>4</td></tr>
<tr><td>연세대</td><td>수시</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>이화여대</td><td>수시</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">중앙대</td><td>수시2차(자연1)</td><td>3</td><td rowspan="2">5</td></tr>
<tr><td>수시2차(자연2)</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">한양대</td><td>수시(오전)</td><td>6</td><td rowspan="2">13</td></tr>
<tr><td>수시(오후)</td><td>7</td></tr>
<tr><td>총</td><td></td><td>84</td><td>84</td></tr>
</table>

3. 분석 참여 교사들(14명 현직 고교 수학 교사들)

김민수(경상대사대부고), 김영혜(진관고), 김우영(부천북고), 박문환(인천 인제고), 박찬석(우신고), 심혜진(인천 삼산고), 원태경(부산일과학고), 윤태호(신서고), 이미숙(화정고), 이정아(화곡고), 정소이(인천 계산고), 지영배(인천 계양고), 천무현(영신여고), 최경화(대광고) 이상 14인.

4. 분석 기준 및 결과

■ 제 1 기준 : 대학 교과 수준의 내용이 출제되고 있지는 않은가?

□ 평가 1 : 분석한 총 84문항 중 54.8%의 문항이 대학 교과 수준의 내용에서 출제됨

대학	전형	대학 내용 문항수/총문항	대학별 총 분석 문항수/총문항	대학 내용 출제 비율
경희대	수시2차(토)	3/3	3/6	50%
	수시2차(일)	0/3		
고려대	수시(오전)	1/5	4/11	36%
	수시(오후)	3/6		
서강대	화공,컴공	8/8	11/14	79%
	자연,전자, 기계	3/6		
서울대	정시	4/4	4/4	100%
서울 시립대	자연A형	4/8	4/16	25%
	자연B형	0/8		
성균관대	수시(자연1)	0/4	2/8	25%
	수시(자연2)	2/4		
연세대	수시	4/4	4/4	100%
이화여대	수시	0/3	0/3	0%
중앙대	수시2차(자연1)	1/3	1/5	20%
	수시2차(자연2)	0/2		
한양대	수시(오전)	6/6	13/13	100%
	수시(오후)	7/7		
총		84	46/84	54.8%

※[표1] 2012수리논술에서 대학 내용이 출제된 문항수 및 비율

□ *평가 2 : 대학 수준의 교과 내용이 출제되어 2012년 세계 수학 교육 대회 교사 연수에 참가한 고등학교 수학 교사 162명을 대상으로 한 설문조사 결과, 무려 94%의 교사가 학교 수업만으로는 이런 수리 논술 시험을 대비할 수 없다고 응답함(붙임1 참고).*

■ 제 2 기준 : 통합적・창의적 사고가 필요 없는 정해진 풀이와 정답을 요구하는 본고사형 문제가 출제되고 있지는 않은가?

□ *평가 1 : 분석한 모든 10개 학교 총 84문항 모든 문항이 본고사형으로 출제 되었으며 논술형으로 볼 수 있는 문항은 단 문항도 없었음.*

대학	전형	본고사형/총문항	본고사형 비율
경희대	수시2차(토)	3/3	100%
	수시2차(일)	3/3	100%
고려대	수시(오전)	5/5	100%
	수시(오후)	6/6	100%
서강대	화공,컴공	8/8	100%
	자연,전자, 기계	6/6	100%
서울대	정시	4/4	100%
서울 시립대	자연A형	4/8	100%
	자연B형	8/8	100%
성균관대	수시(자연1)	4/4	100%
	수시(자연2)	4/4	100%
연세대	수시	4/4	100%
이화여대	수시	3/3	100%
중앙대	수시	5/5	100%
한양대	수시(오전)	6/6	100%
	수시(오후)	7/7	100%
총		84	100%

■ 제 3 기준 : 고등학교 교육과정을 충실히 하더라도 도저히 풀 수 없는 고난 이도의 문항이 출제되고 있지는 않은가?

□ *평가 : 난이도를 정확히 파악하기 위해서는 각 문항별 정답률을 알아야 하지만 각 대학에서 문항별 정답률을 공개하지 않아 현직 교사의 수리 논술 관련 설문으로 파악함. 그 결과, 2012 국제 수학 교육 대회 교사 연수에 참가한 전국 고등학교 수학교사 의 80%가 최근 출제 되고 있는 수리 논술 문제가 매우 어렵다고 응답함.*

■ 제 4 기준 : 사교육 없이도 준비 할 수 있도록 대학이 홈페이지 등을 통해 충분한 정보를 제공하고 있는가?

□ *평가 : 총 10개 대학 중 예시 답안은 2개 대학만이 공개하였고, 문항별 채점 기준 및 정답률을 공개하는 학교는 한 곳도 없음.*

학교명	기출문제 공개	예시 답안 공개	문항별 채점 기준 및 정답률 공개	종합
경희대	○	○	×	50점
고려대	○	×	×	25점
서강대	○	×	×	25점
서울대	○	×	×	25점
서울시립대	×	×	×	0점
성균관대	○	○	×	50점
연세대	○	×	×	25점
이화여대	○	×	×	25점
중앙대	○	×	×	25점
한양대	○	×	×	25점

[표2] 기출문제 대학별 정보 공개 현황[1)]

(○ : 공개함 × : 공개하지 않음)

1) 각 대학에서 문항별 채점기준과 정답률을 공개하지 않아 수험생들에게 시험 준비에 어려움을 주고 있다. 따라서 이 항목에 대한 비중을 강화하여, 기출문제 공개 (25점)+ 예시답안 공개(25점)+문항별 채점 기준 및 정답률 공개(50점)로 책정하여 평가하였다.

■ 2012 수리 논술 전체 분석 종합결과표

(*위의 4기준에 따라 각각 분석한 것을 하나의 틀로 종합한 결과 값임)

대학	대학 내용 출제 비율	본고사형 비율	정보제공
경희대	50%	100%	50점
고려대	36%	100%	25점
서강대	79%	100%	25점
서울대	100%	100%	25점
서울 시립대	25%	100%	0점
성균관대	25%	100%	50점
연세대	100%	100%	25점
이화여대	0%	100%	25점
중앙대	20%	100%	25점
한양대	100%	100%	25점
총	54.8%	100%	27.5점

(○ : 공개함 × : 공개하지 않음)

※시립대의 경우 기출문제를 홈페이지에 올리지 않아서 분석 대상에서 빠진 것으로 수 일 내로 이와 관련된 분석을 해서 결과를 중앙일보 측에 제공할 것임

5. 결론 및 제안

수능과 내신이 평가하지 못한다고 생각했던 한 요소가 바로 '논술'이었는데, 그 모델은 프랑스의 바칼로레아 등이다. 그러나 현실적으로 매우 높은 경쟁률 하에서 '선발'을 위해 어쩔 수 없이 작은 점수의 차이라도 '변별'해야 하는 우리의 상황에서는 논술을 전형 요소로 삼는다는 것 자체가 어느 정도의 모순을 내포하고 있었다. 잘 쓴 논술과 못 쓴 논술을 미세한 점수 단위로 분류하는 것은 사실 이상한 일인데, 높은 경쟁의 상황에서는 미세한 점수 차이를 변별해야 하기 때문에 대학에서는 대학 수준의 내용에 어려운 본고사형 문제를 출제 하고 있는 것이다.

또한 수리논술의 난이도를 정확히 파악하기 위해서 각 문항별 정답률을 통한 분석이 우선이지만 각 대학에서 정답률 공개를 하지 않아 현직 교사들의 난이도 평가를 하는데 어려움이 있었다. 이에 난이도 평가를 해결하고자 2012년 국제 수학 교육 대회 교사 연수에 참가한 고등학교 수학 교사 162명을 대상으로 한 설문으로 대체하였다. 설문 조사 결과, 수학 교사의 80%가 수리 논술 문제가 매우 어렵다고 응답함으로써 고등학교 정규교육과정만으로 수리논술 문제를 해결하기 어렵다고 분석하였다.

그리고 설문에 참여한 교사들의 35%가 이러한 수리논술은 폐지되어야 한다고 주장하고 있으며 55%가 고교 교사 출제 참여 등을 통해 출제 방식 개선이 이루어져야 한다고 생각하고 설문조사에 응한 단 1명만이 현행유지를 해야 한다고 생각하고 있다는 것에서 볼 수 있듯이 현 수리논술 문제가 학교 현장에 얼마나 나쁜 영향을 주며 사교육 유발의 심각한 원인인지 문제를 접한 수학 교사들은 쉽게 알 수 있을 것이다. 이에 사교육걱정없는세상에서는 다음과 같이 제안한다.

1. 대학별 수리 논술 고사는 폐지되어야 한다.

수학의 대중화와 쉬우면서 실용적인 수학을 추구하는 현 수학 교육의 흐름을 역행 할 뿐 아니라 고액 수학 사교육의 주원인인 수리논술은 모든 면에서 초기 의도와는 다르게 진행되고 있다는 것이 전문가들의 한결같은 목소리 이다. 단지 대학들이 쉽게 변별하기 위한 도구로서 이와 같이 대학수준의 내용과 본고사형의 문제유형, 교사들 풀기 어려운 난이도의 수리논술을 출제 한다면 대학에서 출제되는 한 문제 한 문제에 큰 영향을 받는 공교육의 바람직한 변화와 사교육의 감소는 쉽지 않을 것이다.

2. 만약 대학들이 수리논술을 계속 출제해야 한다면 다음 두 가지는 반드시 개선되어야 한다.

첫째, 고등학교 교육과정을 벗어난 대학수준의 내용은 출제 되지 말아야 하며 고등학교

교육과정 내의 내용과 기호가 다루어졌는지에 대한 현직 교사 또는 교육과정을 잘 알고 있는 전문가들의 검토가 반드시 이루어져야 한다. 현재 대부분의 대학들은 출제 기간의 촉박함과 인력풀의 부족 정보 유출의 위험성으로 인해 제대로 된 검토가 이루어지지 않고 있다. 수학능력 평가는 30문제에 의해 당락이 좌우 되지만 수리논술은 단지 2~6문제에 의해 성패가 갈라지기 때문에 각 문제의 적절성은 신중히 검토 되어야 한다. 대학별고사 전형료는 8~12만원 정도가 되며 해마다 많은 수험생들이 응시하고 있어 전형료 수입만도 상당한 것으로 알고 있다. 대학들은 이러한 전형료 수입은 좋은 문제를 만들고 검토하고 채점하는 본래의 목적으로 사용해야 할 것이다.

둘째, 입시가 끝나면 각 문제에 대한 예시답안, 문항별 채점기준, 문항별 정답률을 공개해야 한다. 현재 문항별 채점기준과 정답률을 공개하는 대학은 10개 대학 중 한 군데도 없다. 시험의 난이도와 어느 정도의 실력이면 합격할 수 있을지 알 수 있어야 학교와 부모들은 수험생들의 대입 지도가 가능 할 것이다. 누구나 사교육 없이 공교육에서 배우고 가르쳐질 수 있도록 대학은 학교와 수험생들이 필요한 정보를 성의 있게 제공해야 한다.

셋째, 관리 당국은 매년 대학들이 출제 문제 분석을 통해 고등학교 교육과정의 준수 여부와 사교육 을 유발하는 요소가 있는지 지속적인 모니터링을 실시 감독해야 한다. 수리논술 문제는 현 정부의 대학자율화 정책을 실시한 2008년부터 본고사형의 고난이도 문제가 출제되기 시작했으며 최근 들어서는 이와 더불어 대학수준의 내용이 출제되고 있다. 이러한 점들은 대학들이 자율적으로 논술고사의 기본취지를 살리는 운영을 하려는 의지가 없다는 증거이기도 하다. 따라서 관계 당국은 매년 출제 문항에 대한 전문가들의 의견과 시험을 치룬 학생들의 현장 설문을 종합하여 각 대학들의 사교육 영향 평가를 실시하고 그 결과를 대학지원에 반영하는 정책을 추진해 대학들이 좋은 문제를 만드는데 관심을 갖도록 유도해야 할 것이다.

※별첨 자료 1 : 세부 분석 내용

1. 대학 수학 수준의 선행을 하면 유리한 문항들이 출제되고 있지는 않은가?

실제로 어떤 수학 문제가 초·중·고등학교 교육과정을 벗어난 것인지를 판단하기는 애매한 부분이 많다. 출제진의 입장에서는 고등학생들이 대학교 교육과정에 나온 수학 내용의 의미를 몰라도 주어진 제시문의 조건을 이용하여 문제를 해결할 수 있다고 주장할지도 모르나, 그렇다고 해서 교육과정 밖의 대학수준의 내용을 다룬 사실이 정당화될 수는 없다.

예를 들어, 고등학생이 모르는 군(群, group)의 정의를 문제에서 가르쳐주고 유리수의 집합이 군이 되는 것을 증명하라는 문제를 낸다고 생각해보자. 별로 어렵지 않은 것 같고, 주어진 정의를 따르기만 하면 고등학생들도 증명할 수 있는 학생이 있을 수 있지만, 입시를 준비하는 입장에서는, 시험에서 다루고 있는 소재가 대학 교재에 있는 내용이라면 그 교재를 보는 것이 유리할 것이라는 생각, 또는 그 교재를 보아야 한다는 부담을 가질 수밖에 없다. 그런데 고등학교의 수업 시간에는 대학 교재의 내용을 현실적으로 몇몇 수리논술 대비학생들을 위해 다루기는 어렵고, 그런 수업을 개설하는 사교육이 존재하기 때문에 학생들은 사교육을 찾아갈 수밖에 없는 것이다.

결국 대학의 수학 교재에 나온 내용을 수리 논술 출제에서 다루게 되면 그것은 곧 학생들이 그것을 공부하도록 유도하는 결과가 된다. 그래서 이번 분석에서는 대학교의 수학과 교육과정에서 다루는 개념을 포함하고 있는 문제를 초·중·고등학교 교육과정을 벗어난 문제로 판단하기로 하였다.

대학	시험 형태	고등학교 수준을 벗어난 대학 수준 내용	대학 과목
경희대	수시2차 (토)	좌종점 근삿값, 우종점 근삿값	미적분학
고려대	모의 논술	무한개의 집합에 대한 합집합, 교집합, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$	해석학
	수시 (오전)	타원의 넓이를 구하는 공식	미적분학
	수시 (오후)	연립점화식의 풀이	미적분학
서강대	수시 (화공)	코드 이론 　계산가능성 $E(f(X)) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x)g(x,w)$, $\frac{d}{dw}g(0,w)$ 포아송 분포, 테일러급수 $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{x!}$	해석학

	수시 (전자)	합동변환, 내적 보존성	복소함수론
서울대	정시 논술	이상 적분 $\lim_{A \to \infty} \int_e^A \left(\frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{f(x)} \right) dx$	해석학
서울 시립대	수시논술 (자연A)	실수의 조밀성	해석학
성균관 대	수시 (자연2)	고유벡터, 기저, 3차 공간에서의 일차변환	선형대수학
연세대	수시 논술	오목 볼록	미적분학
이화여 대	모의 논술	$\sum_{\frac{1}{a_n} \in S} \frac{1}{a_n}$ 의 수렴성, 평균치 정리	해석학
한양대	모의(1차)	케일리-해밀턴 정리(3차) 최소다항식	선형대수학
	모의(2차)	Curve 적분가능	미적분학
	수시 (오전)	대각화(고유치, 고유벡터), 기저, $f_A^k[S]$ 감소수열 $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_{a_n}^b f(x)\,dx$ 불연속 함수의 적분	선형대수 해석학
	수시 (오후)	페르마의 수, 공간에서의 매개변수 함수	정수론

[표3] 대학별 대학 수준의 출제 내용

이 내용은 수학을 전공하거나 대학수학의 내용으로 수학과 학부생들도 접근하기 어려운 문항들이고 교사들 역시 학부 때 한 학기 정도 배운 내용들이 대부분이라 이 내용 가르치는 것이 어렵다. 또한 미적분학, 해석학, 선형대수, 통계학 등 대학에서 수학을 전공하는 학생들의 커리큘럼 전 과정에서 출제되는 광범위한 내용이기에 학원에서도 전문적으로 수리 논술을 가르치는 것이 쉽지 않다고 한다. 이러한 이유로 사교육이 성행하는 지역의 소수의 학원에서만 전문적으로 가르치고 있는 상황이다. 2006년 처음 수리 논술의 주요 내용은 고등학교 내용 중 수학사적으로 중요한 내용, 실생활과 접목할 수 있는 소재, 공식을 이용한 단순한 풀이가 아닌 원리를 이해하고 있는지를 물어보는 논제가 대부분이었던 것과는 전혀 다른 방향이다.

이러한 문제가 출제되는 이유를 실제 출제에 관여한 교수들에 의하면 대부분의 대학이 논술 문항 출제를 위한 전문적인 기관이 없고 몇 명의 출제 교수가 짧은 기간에 오류가 없는 문항을 개발하기

쉽지 않기 때문에 교수들이 자기가 전공한 과목에서 출제 되고 있다는 것이다. 대학 교수들이 고등학교 교육과정에 대해 깊이 이해하고 있지 않고 고등학교 교사가 문항 제작에 참여하거나 검토하기에는 보안상의 문제로 불가능하기에 더욱 심각한 상황이다.

또 다른 이유는 논술이 시작된 참여정부 시절에는 정부에서 논술의 문항에 대한 관리가 이루어졌지만 현 정부는 대학교육협의회를 통해 거의 대학의 자율에 맡기기 때문일 것이다. 그래서 이전에는 대학 수준의 내용이 출제된다 해도 고등학교 교육과정의 언어와 내용으로 변화시키려는 노력이 있었지만 최근 문항에서는 대학 수학의 내용과 언어를 아무런 여과 없이 출제하고 있다.

이로 인해 2012년 세계수학교육대회 교사 연수에 참가한 고등학교 수학교사 162명을 대상으로 한 설문조사 결과 94%의 교사가 학교 수업만으로는 수리논술을 대비할 수 없다고 응답하였다. 현직 교사들이 수업시간에 준비 할 수 없다고 할 정도의 대학 수준의 문제가 출제된다면 수험생들은 부담스럽지만 사교육의 문을 두들길 수밖에 없을 것이다. 사교육 대학 선행학습을 통해 배운 학생과 시험장에서 처음 제시문에서 접한 학생과는 차이가 날 수 밖에 없다. 또 논술은 수능과 같이 많은 문제가 출제 되는 것이 아니라 단지 2~6문제가 출제되어 미리 접한 내용이 출제된 경우와 그렇지 않은 경우의 합격 불합격 여부에 상당히 큰 영향을 주기 때문에 논술을 통해 대학에 가기 위해서는 사교육의 부담을 가질 수밖에 없다.

2. 통합적 창의적 사고를 막는 정해진 풀이와 정답을 요구하는 본고사형 문제가 출제되고 있지는 않은가?

창의적이며 논리적인 사고를 평가하는 문항은 유일한 풀이 과정을 통해 정해진 정답을 구하는 문제가 아니라 적절한 가설을 세워 논리적 모순 없이 알맞은 수학적 언어를 사용하여 서술을 요구하는 문항일 것이다. 이러한 논제는 논리적 모순만 없다면 다양한 답이 나올 수 있어 창의적인 사고이고 논리적인 사고를 유도 할 수 있어 수학교육의 바람직한 변화를 일으킬 수 있을 것이라 기대했고 초기 수리 논술 문제는 실제로 제시문에 대한 타당성 논하기, 추론하기, 분석하기 등의 출제 의도와 맞는 논제들이 출제 되었다. 논술이 시행되던 초기에 정부도 이러한 방향이 흔들리지 않도록 관심을 가지며 논술고사 가이드라인을 제시하여 수학, 과학과 관련한 과정이나 정답을 요구하는 문제는 출제하지 못하도록 하였다. 하지만 시간이 흐르고 정부의 통제가 느슨해지면서 만들기 쉽고 채점하기 쉬운 정해진 답을 구하거나 어려운 정리의 증명을 요구하는 본고사형의 문항의 출제가 점점 늘고 있다는 현장의 목소리가 커지고 있다. 이는 논술 고사를 통하여 주입식 기계적 문제 풀이 위주의 수업을 바꾸어보겠다는 취지와는 달리 더욱 문제 풀이 수업을 부추기고 있을 뿐만 아니라 수년간 기출문제 정답 정보를 가지고 있는 사교육이 유리한 상황을 만들어 사교육을 유발하는 원인이 되고 있다.

[7-8] 다음 지문은 어느 신문 기사에서 발췌한 내용이다. [30점]

제시문

최근 여성의 사회 진출이 크게 늘어나고 있으나 대기업의 남녀의 임금 격차는 지난 5년간 50% 이상 더 크게 벌어진 것으로 나타났다. 이는 여성들이 관리직보다는 저임금의 생산직에 집중되어 있을 뿐 아니라 승진에서 밀려 고위직에 진출하지 못하기 때문이라고 풀이됐다.

50개 대기업들이 제출한 2000년과 2005년 상반기 보고서에 따르면, 이들 기업의 남녀 직원 임금 격차는 2000년 상반기 월평균 106만 1천원에서 2005년 상반기 월 평균 162만 1천원으로 52.8% 확대됐다. 이들 50개 대기업에서 2000년 상반기 남성 임금은 월 평균 280만 7천원, 여성 임금은 174만 6천원이었는데, 2005년 상반기에는 남성이 424만 6천원, 여성이 262만 5천원으로 전반적으로 임금이 증가한 가운데 남성의 임금 상승 폭이 훨씬 컸다.
<중략>

남녀 간 임금 격차가 발생하는 것은 고액의 임금을 받는 간부나 임원으로 승진하는 여성의 비율이 낮고 상당수의 여성들은 회사를 일찍 그만두어 나이가 어린 여성 직원이 많기 때문인 것으로 분석됐다.

7. 위 기사는 성별 임금 격차가 심화되었다고 주장한다. 이 기사를 읽은 규선이는 기사에 소개된 자료를 사용하여 다음과 같은 표를 작성하고, 이를 근거로 남녀 임금 차이가 그다지 심화되지 않았다는 주장을 하였다.

[표] 2000년과 2005년 주요 대기업 남녀 평균 임금 비교

연도	남성 평균 임금 (A)	여성 평균 임금 (B)	남녀 임금 차 (A-B)	남녀 임금 비 (B/A)
2000년	280만 7천원	174만 6천원	106만 1천원	62.2%
2005년	424만 6천원	262만 5천원	162만 1천원	61.8%

규선이의 주장의 근거를 위의 표에서 찾아 설명하고, 규선이와 기사의 상반된 두 주장에 대해 자신의 견해를 논하시오.

8. 위 신문 기사의 밑줄 친 내용에 따르면, 남녀 임금 격차가 존재하는 원인에 대해 다음과 같은 가설이 가능하다.

가설: 여성들은 승진 기회를 얻기 이전에 빨리 퇴직하는 경우가 많아 임금이 더 높은 고위직이나 관리직에 있는 여성의 비율이 남성에 비해 낮다. 따라서 여성 평균 임금이 남성에 비해 낮게 나타난다.

위 가설의 타당성을 평가하기 위해 신문 기사에서 언급된 자료 외에 어떤 통계 자료가 더 필요하며, 그 자료를 어떻게 분석해야 하는지를 설명하시오.

[표4] 2006년 이화여자대학교 수시2차 논술 문항 중 일부

제 시 문 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

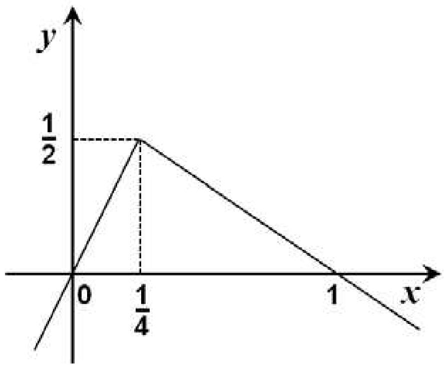
함수 $f(x)$는 실수의 집합 $\mathbb{R}$을 정의역과 공역으로 갖는 연속함수이다. 집합 A와 B는 주어진 함수 $f(x)$에 의하여 결정되며 다음과 같이 정의한다.

$A=\{t\in(0,\ 1)\,|\,$어떤 실수 a가 존재하여 부등식 $f(x)\le f(t)+a(x-t)$이 모든 실수 $x\in[0,\ 1]$에 대하여 성립한다. $\}$

$B=\{a\in\mathbb{R}\,|\,$어떤 실수 $t\in(0,\ 1)$가 존재하여 모든 실수 $x\in[0,1]$가 부등식 $f(x)\le f(t)+a(x-t)$을 만족한다. $\}$

[논제 I-1]

함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때 집합 A와 B를 구하여라.



[논제 I-2]

함수 $f(x)$가 $x\le 0$이거나 $x\ge 1$일 때 $f(x)=0$이라고 하자. 또한 주어진 자연수 k에 대하여 $0=c_0<c_1<c_2<\cdots<c_k<c_{k+1}=1$을 만족하는 점 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_k$에서 얻어지는 닫힌구간 $[c_i,\ c_{i+1}]$ $(i=0,\cdots,k)$ 각각에서 함수 $f(x)$의 그래프는 선분이라고 가정하자. 이러한 성질을 만족하고 집합 B의 길이가 2π이며, $k=2$인 경우의 모든 함수 $f(x)$에 대하여 이들 함수의 최댓값 중에서 가장 큰 값 Q를 구하시오. 그리고 그 최댓값 Q를 갖는 함수 $f(x)$에 의하여 결정되는 모든 집합 A를 구하시오.

[논제 I-3]

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 모든 실수에서 존재하고 연속이라고 하자. 이 함수 $f(x)$에 의하여 결정되는 집합 A가 닫힌 구간 $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4}\right]$일 때, 집합 B를 구하시오.

[논제 I-4]

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$와 이계도함수 $f''(x)$가 모든 실수에서 존재하고 연속이라고 하자. 또한 함수 $f(x)$에 의하여 결정되는 집합 A가 열린구간 $(0,\ 1)$이고 $\int_0^1 |f''(x)|dx = \frac{4}{3}\pi$ 이며, $f(0)=f(1)=0$이라고 하자. 이러한 성질을 만족하는 모든 함수 $f(x)$의 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 최댓값의 집합을 C라고 할 때, 집합 $\{b \in \mathbb{R} \mid \text{모든 } m \in C\text{에 대하여 } m \le b\}$의 최솟값 S를 구하시오.

[표5] 2012년 연세대학교 수시 논술 문제

2006~2007년 정도 까지는 [표4]과 같이 주어진 자료를 분석하여 해석하고 그 내용을 바탕으로 논리적으로 자신의 주장을 서술할 수 있는 문항들이 많이 출제 되었다. 하지만 2008년 최상위권 대학부터 시작하여 현재는 분석한 모든 대학의 논술 문제가 이러한 정해진 답을 구하는 본고사형 문항이 출제되고 있다. 자신의 주장이나 생각을 어디 하나 넣을 수 없는 단지 문제를 푸는 능력만 평가하고 있어 2006년 정부가 제시한 논술 가이드라인에 의하면 전혀 논술문제라 할 수 없는 문제를 모든 대학교에서 출제 하고 있는 것이다. 몇 대학에서 증명하는 문제가 출제되고 있지만 이것도 개방적・확산적 사고를 할 수 있는 문제가 아니라 증명을 외워서 쓸 수 있는지를 묻고 있는 현실이다.

이와 같이 본고사 형의 문제를 출제 하고 있는 이유를 짐작해보면 변별의 도구로서 공정성과 객관성이 중요하게 여겨지면서 채점의 공정성과 편의를 위해 답을 요구하는 본고사형의 문제가 출제된다고 생각되어진다. 또한 논술형 문항을 제작하기 위해서는 많은 노력과 투자가 필요한데 좋은 논술문항을 제작하려는 대학들의 노력이 매우 부족한 상황이다. 좋은 문항을 개발 하려는 노력 보다는 채점과 변별이 쉬운 하나의 정답을 요구하는 본고사형을 대학들이 선호하고 있는 것이다. 본고사형 문항이 출제되면 고등학교 수학 수업은 더욱 문제풀이형 수업이 될 수밖에 없고 기출문제를 반복적으로 풀어주는 논술 사교육을 받은 학생이 유리할 수밖에 없다. 이러한 문제가 있음에도 불구하고 현 정부의 관계부처는 이런 문제점을 한 번도 지적 한 일이 없기에 대학들은 출제와 채점이 쉬운 본고사형 문항을 출제하고 있는 것이다.

3. 고등학교 교육과정을 충실히 하더라도 풀 수 없는 고난이도의 문항이 출제되고 있지는 않은가?

7차 교육과정부터는 학생들이 학교 교육을 통해 도달해야할 성취 기준을 분명히 규정하고 있다. 이러한 성취 기준을 바탕으로 학교에서는 학생들이 도달해야 할 성취수준까지 가르치고 도달 했는지

평가하는 것은 기본적인 상식이다. 평가가 학습 내용을 넘지 말아야 하는 것은 고등학교에서 뿐만 아니라 대학 입시에서도 마찬가지가 되어야 할 것이다. 대학 수준 제시문과 경시대회 수준의 문제가 출제 된다면 국가가 정한 성취 기준은 유명무실하게 될 것이고 수리 논술을 준비하기 위해 대학 수준의 내용과 경시대회 문제 수준을 배우기 위해 고액 학원으로 몰리는 것은 당연한 일이 될 것이다.

검토 교사들의 간담회를 통해 나온 이야기 중 현재 나오고 있는 수리 논술의 문제는 현직 교사들도 풀기 어려운 문항이 출제 되고 있다는 것이 공통된 의견이다. 공교육의 수학수업을 열심히 하더라도 풀 수 없는 문항이 출제되어 어느 대학에서는 전체 응시생의 정답률이 0인 적도 있다고 한다. “어려운 문제 출제해야 명문대학임을 과시하는 것처럼 경쟁적으로 고등학교에서는 배우지도 않는 어려운 문제를 출제 하고 있다.

이러한 이유로는 추정해보면 대부분의 대학이 많은 인원이 응시하다보니(2012년 고려대학교 수시 일반전형은 1386명 모집에 74353명이 응시하여 경쟁률이 53.65:1이었음) 채점의 어려움과 많은 인원 중 소수의 인원을 선발하기 위해 상당히 높은 난이도의 문제를 출제하고 있는 것이라 생각이 된다. 물론 어려운 문제가 모두 나쁘다는 것은 아니지만 수학적으로 가치가 높지 않으면서 고난이도의 문제가 수리논술에서 계속 출제 된다면 ‘수학= 어렵다’라는 인식만을 남겨 수학은 어렵고 그래서 하기 싫은 과목이라는 인식을 만들고 있어 수학이 실생활에 유용하며 유익한 과목으로 유도하기 위한 다양한 노력에 걸림돌이 될 수 있다.

서울 N고 3학년 김모(18)군은 지난 1일 치른 Y대(자연계) 수시전형 수리 논술 시험에서 두 시간 반 동안 네 문제 중 두 개밖에 못 풀었다. 함수의 최대 값, 집합의 범위 등을 구하는 문제가 출제됐는데 두 문제는 손도 못 댄 것. 김군의 평소 모의고사 성적은 전국 상위 1% 이내. 그는 “과거 본고사 수학 문제 같았다”며 “그동안 풀었던 수리 논술 문제 중 가장 어려워 한 문제도 못 푼 학생도 많았다”고 말했다.(중략) 올해 수시 모집에서 각 대학이 경쟁적으로 어려운 논술 문제를 출제해 수험생들이 혼란에 빠졌다. 정답을 요구하는 수학·과학 문제, 이해하기 어려운 용어가 담겨 있는 지문, 영어 지문 문제들이 속출한 것이다. (중앙일보 2010.10.10.일 기사)

[표6] 수리 논술 난이도 관련 기사 일부

4. 사교육 없이도 준비 할 수 있도록 대학이 홈페이지 등을 통해 충분한 정보를 제공하고 있는가?

분석한 모든 대학이 구체적인 문항별 채점 기준, 응시생의 평균 합격생의 평균을 제공하고 있지 않다. 수리 논술을 학교에서 가르치기 어려운 이유 중 하나는 분석한 모든 대학이 학교에서 가르치기

에 유용한 정보를 제공하고 있지 않기 때문이다. 대부분의 대학이 기출문제, 출제의도, 좀 더 성의 있는 대학은 모범 답안 정도만 제공하고 있고 채점 기준과 응시생 중 몇 명의 학생이 그 문제를 풀었고 합격생의 평균 점수가 얼마나 되는지 등의 자세한 정보는 공개하지 않고 있다. 이로 인해 어느 정도 가르쳐야 하는지 어느 정도 수준의 학생이 합격이 가능한지 가늠할 수가 없다. 이는 본고사가 시행되던 때 각 문항의 정답률을 제공하던 것에 비해 훨씬 정보제공 면에서 후퇴한 것이다.

[표7] 수리 논술 정보 제공 현황

일부 대학이 제공하는 정보	대학은 제공하지 않으나 공교육에서 가르치기 위해 필요한 정보
- 기출문제 - 출제 의도 - 모범답안 (일부대학)	- 각 문항별 구체적 채점기준 - 합격생 평균 합격점 - 합격생의 답안에 대한 채점 예시

어려운 논술 문제를 출제하면서 기출문제에 대한 자세하고 성의 있는 예시 답안과 채점 기준 및 해설 동영상들을 제공하고 있지 않고 본고사 시행 때도 제공하였던 문항별 채점 기준과 합격생들의 평균 점수가 공개 되지 않는 것은 입시를 준비하는 학생에게 부담감과 두려움만 더욱 가중하고 있는 것이다. 8~12만 원 정도의 원서비용을 지불하고 자신의 점수가 얼마나 되는지 무엇을 틀렸는지 알 수도 없이 불합격 판정만 받는 것은 대학들의 횡포가 아닐 수 없고 또 채점의 투명성을 의심할 수밖에 없는 상황을 만들고 있는 것이다.

※별첨 자료 2 : 국제수학교육대회 교사연수 참여 한 전국 고등학교 교사 162명 설문조사 결과

1.현재 선생님이 근무하는 학교에서 수리논술 대비 수업이 진행되고 있습니까?

설문내용	응답 인원	비율
① 예	91명	56%
② 아니오	71명	44%

2. 최근 대학에서 출제되고 있는 수리논술 시험이 학교 수업만 열심히 하면 대비가 가능하다고 생각하십니까?

설문 내용	응답인원	비율
① 가능하다	10명	6%
② 가능하지 않다	152명	94%

3. 최근 대학에서 출제되고 있는 수리논술 시험이 현재 학교 수학 수업과 평가에 어떠한 영향을 주고 있다고 생각하십니까?

설문 내용	응답인원	비 율
① 부정적인 영향을 준다	77명	48%
② 전혀 영향을 주지 않는다	60명	37%
③ 문제 풀이 수업에서 생각하는 수업으로 비교적 긍정적인 영향을 준다	25명	15%
④ 문제풀이 수업에서 생각하는 수업으로 매우 긍정적인 변화를 유도하고 있다	0명	0%

4. 최근 출제되고 있는 수리논술 시험 문제가 수능과 비교했을 때, 난이도가 어떻다고 생각하십니까?

설문 내용	응답인원	비 율
① 매우 쉽다	1명	1%
② 쉽다	2명	1%
③ 비슷하다	2명	1%
④ 조금 어렵다	28명	17%
⑤ 매우 어렵다	129명	80%

5. 현행 수리논술 시험문제가 개선되어야 한다면 어떤 방향이 적절하다고 생각하십니까?

설문 내용	응답인원	비 율
① 수리논술 폐지	60명	37%
② 고교 교사 출제 참여 등을 통해 출제 방식 개선	89명	55%
③ 현행 유지	1명	1%
④ 기타	12명	7%

※별첨 자료 3 : 대학 교과 수준의 내용이 출제된 문항 및 문제 분석

□ 2012 고려대 모의논술

제 시 문 | 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(다)
무한개의 집합 $A_1, A_2, A_3, \cdots$을 생각하자. 어떤 자연수 n에 대하여 $x \in A_n$을 만족하는 x들의 모임을 집합 $A_1, A_2, A_3, \cdots$의 합집합이라 하고 이 집합을 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$과 같이 나타낸다. 즉,
$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \text{어떤 자연수 } n\text{에 대하여 } x \in A_n\}$이다. 모든 자연수 n에 대하여 $x \in A_n$을 만족하는 x들의 모임을 집합 $A_1, A_2, A_3, \cdots$의 교집합이라 하고 이 집합을 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$과 같이 나타낸다. 즉, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid \text{모든 자연수 } n\text{에 대하여 } x \in A_n\}$이다.

[논제 2]
어떤 집합 X에 대하여 X의 모든 부분집합들의 집합을 Y라 하자. 집합 X에서 X로의 함수 $f: X \to X$에 대하여 집합 Y에서 Y로의 함수 $F: Y \to Y$를
$F(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ 와 같이 정의하자. 자연수 n에 대하여 B_n을
$B_1 = X,\ B_n = F(B_{n-1}),\quad n = 2, 3, \cdots$과 같이 정의하고 $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$이라 하자.

(a) Y의 원소 C_1과 C_2가 $C_1 \subset C_2$를 만족할 때, $F(C_1) \subset F(C_2)$가 성립함을 설명하시오.

(b) Y의 원소 D가 $F(D) = D$를 만족할 때, $D \subset B$가 성립함을 설명하시오.

(c) X가 모든 실수들의 집합이고 $f(x) = -\sin\frac{x}{2}$ 일 때, $F(A) = A$를 만족하는 Y의 원소 A를 모두

찾으시오.

<문항 분석>
이 문제는 대학의 해석학에 나오는 무한개의 집합에 대한 합집합과 교집합을 다루고 있다. 특히 기호 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$와 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$의 정의는 전형적인 대학 교육과정이다.

□ 2012 성균관대 수시 (자연 2)

문 제 1 다음 <제시문 1-1>부터 <제시문 1-2>를 읽고 물음에 답하시오.

<제시문 1-1> 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 다항식일 때, 이 함수를 다항함수라 하고, $f(x)$가 x에 대한 분수식일 때, 이 함수를 분수함수라 한다.
<제시문 1-2> 분수함수는 두 다항함수의 몫으로 나타나므로 분모를 0으로 하지 않는 모든 실수에서 연속이다.

<제시문 1-3> 다항함수 $p(x)=\sum_{n=0}^{5} a_n x^n = \left(x-\frac{1}{2}\right)(x-3)(x-4)(x-\alpha)(x-\beta)$라고 하자. 여기서 α와 β는 0이 아닌 실수이다.

<제시문 1-4> 다항함수 $q(x)=\sum_{n=0}^{5} a_{5-n} x^n$이라고 하자.

[문제 1-i] 2가 아닌 모든 실수 c에 대하여 $\lim_{x\to c}\frac{p(x)}{q(x)}$가 존재하도록 의 α와 β의 값을 구하시오.

[문제 1-ii] 위에서 구한 α와 β를 대입한 후, $\lim_{x\to 3}\frac{p(x)}{q(x)}$의 값을 구하시오.

문 제 2 다음 <제시문 2-1>을 읽고 물음에 답하시오.

<제시문 2-1> $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$이고 $T=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$라고 하자.

[문제 2-i] $Te_1=e_1+e_2$, $Te_2=e_2+e_3$, $Te_3=e_3$일 때, 행렬 T를 구하시오.

[문제 2-ii] $D=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, 0 \le x_i \le 1, \ i=1, 2, 3 \right\}$ 일 때, [문제 2-i]에서 구한 행렬 T에 대하여 $T(D)=\{\, Ty \mid y \in D \,\}$ 의 부피를 구하시오.

■ 문항 분석

대학에서 배우는 일차변환에서의 기저, 변환의 행렬 표현 등의 선형대수학 내용을 알고 있는 학생들은 문제의 이해에서 정답의 추측까지 기계적으로 해낼 수 있는 유형이라고 판단된다. 또한 삼차원 유클리드 공간에서의 일차변환을 다루고 있으므로 교육과정 외의 경로를 통해서 삼차원 유클리드 공간 사이의 일차변환을 접한 경험이 있는 학생들은 문제를 이해하는 데 유리한 부분이 있을 것이라고 판단된다. 그리고 중적분을 이용하면 교육과정 내에서 문제를 풀이하는 방법보다 더 쉽게 풀이할 수 있을 것이다.

□ 2012 연세대 수시 논술

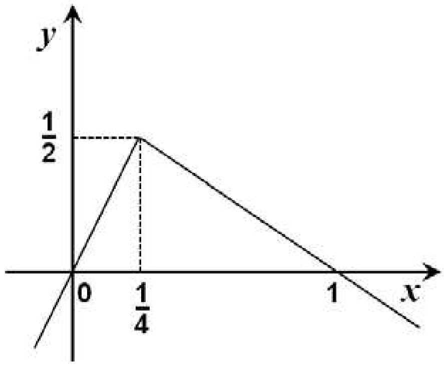
제 시 문 | 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

함수 $f(x)$는 실수의 집합 $\mathbb{R}$ 을 정의역과 공역으로 갖는 연속함수이다. 집합 A와 B는 주어진 함수 $f(x)$에 의하여 결정되며 다음과 같이 정의한다.

$A=\{t \in (0,\,1) \mid$ 어떤 실수 a가 존재하여 부등식 $f(x) \le f(t)+a(x-t)$ 이 모든 실수 $x \in [0,\,1]$ 에 대하여 성립한다. $\}$

$B=\{a \in \mathbb{R} \mid$ 어떤 실수 $t \in (0,\,1)$ 가 존재하여 모든 실수 $x \in [0,\,1]$ 가 부등식 $f(x) \le f(t)+a(x-t)$ 을 만족한다. $\}$

[논제 I-1]
함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때 집합 A와 B를 구하여라.



[논제 I-2]

함수 $f(x)$가 $x \le 0$이거나 $x \ge 1$일 때 $f(x)=0$이라고 하자. 또한 주어진 자연수 k에 대하여 $0=c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_k < c_{k+1} = 1$을 만족하는 점 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_k$에서 얻어지는 닫힌구간 $[c_i,\ c_{i+1}]$ $(i=0, \cdots, k)$ 각각에서 함수 $f(x)$의 그래프는 선분이라고 가정하자. 이러한 성질을 만족하고 집합 B의 길이가 2π이며, $k=2$인 경우의 모든 함수 $f(x)$에 대하여 이들 함수의 최댓값 중에서 가장 큰 값 Q를 구하시오. 그리고 그 최댓값 Q를 갖는 함수 $f(x)$에 의하여 결정되는 모든 집합 A를 구하시오.

[논제 I-3]

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 모든 실수에서 존재하고 연속이라고 하자. 이 함수 $f(x)$에 의하여 결정되는 집합 A가 닫힌 구간 $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4}\right]$일 때, 집합 B를 구하시오.

[논제 I-4]

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$와 이계도함수 $f''(x)$가 모든 실수에서 존재하고 연속이라고 하자. 또한 함수 $f(x)$에 의하여 결정되는 집합 A가 열린구간 $(0,\ 1)$이고 $\int_0^1 |f''(x)|\,dx = \frac{4}{3}\pi$이며, $f(0)=f(1)=0$이라고 하자. 이러한 성질을 만족하는 모든 함수 $f(x)$의 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 최댓값의 집합을 C라고 할 때, 집합 $\{b \in \mathbb{R} \mid \text{모든 } m \in C\text{에 대하여 } m \le b\}$의 최솟값 S를 구하시오.

■ 문항 분석

고등학교 과정에서 함수의 볼록성(convexity)은 함숫값이 변화하는 속도(도함수의 증감) 정도의 의미만으로 직관적으로 다룬다. 제시문의 내용은 볼록성의 정의를 부등식을 이용하여 형식적으로 다루고 있으며 이를 미분계수와 관련짓는 정도가 고등학교 과정을 넘어선다.

□ 2012 한양대 수시 (오전)

논 술 1 다음 제시문<가>~<라>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 좌표평면 $\mathrm{R}^2=\{(x,y)|x,\, y\text{는 실수}\}$ 위의 점 $(x,\, y)$ 를 2×1 행렬 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 로 나타내면, 다음 등식이 성립한다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<나> 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에 대해, 좌표평면 R^2 에서 R^2 로의 함수 f_A 를 다음과 같이 정의한다.

$$f_A(X)=AX,\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

<다> 함수 f_A 는 다음과 같은 등식을 만족한다.

$$f_A(X_1+X_2)=f_A(X_1)+f_A(X_2)$$
$$f_A(cX)=cf_A(X)$$

(단, $X,\, X_1,\, X_2$ 는 좌표평면 R^2 위의 점, c 는 실수)

<라> 좌표평면 위의 영역 S와 자연수 k에 대해, 함수 f_A^k 에 의해 S가 이동된 영역을 $f_A^k[S]$ 라 하자. (단, $f_A^k=f_A\circ\cdots\circ f_A$)

1. 좌표평면 위의 두 점 $X_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$에 대하여, 다음의 영역들을 좌표평면에 나타내시오.

$S_1=\{pX_1+qX_2|p\ge0,\, q\ge0\}$, $S_2=\{pX_1+qX_2|p\ge0,\, q\le0\}$
$S_3=\{pX_1+qX_2|p\le0,\, q\ge0\}$, $S_4=\{pX_1+qX_2|p\le0,\, q\le0\}$

2. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, 영역 $S=\{(x,y)\in\mathrm{R}^2|xy\ge0\}$ 이라 하자.

(1) $f_A[S]$, $f_A^2[S]$, $f_A^3[S]$ 를 좌표평면에 나타내시오.

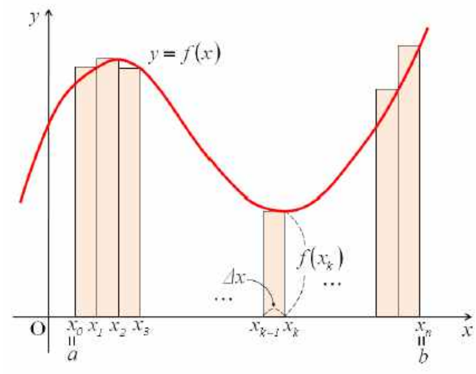
(2) 모든 자연수 k 에 대하여, $f_A^k[S]$ 가 직선 $y=\alpha x$ 를 포함하고 있다. α 를 구하시오.

논 술 2	다음 제시문<가>~<마>를 읽고 물음에 답하시오.

<가> 함수 $y=f(x)$ 가 폐구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 $f(x) \geq 0$ 일 때, 두 직선 $x=a$,$x=b$ 와 x 축 및 곡선 $y=f(x)$ 로 둘러싸인 영역의 넓이 S 를 구분구적법으로 구하면 다음과 같다.

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x,\ \left(\Delta x=\frac{b-a}{n}, x_k=a+k\Delta x\right)$$

이 극한값 S 를 함수 $f(x)$ 의 a 에서 b 까지의 정적분이라 하고, 기호로 $\int_a^b f(x)dx$ 와 같이 나타낸다.



<나> n, m 은 자연수라고 하자. 두 실수 a, b 가 $n-1<a\leq n<m\leq b<m+1$ 일 때, 구간 $[a, b]$ 에서 함수 $y=[x]$ 의 정적분을 다음과 같이 정의한다.(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

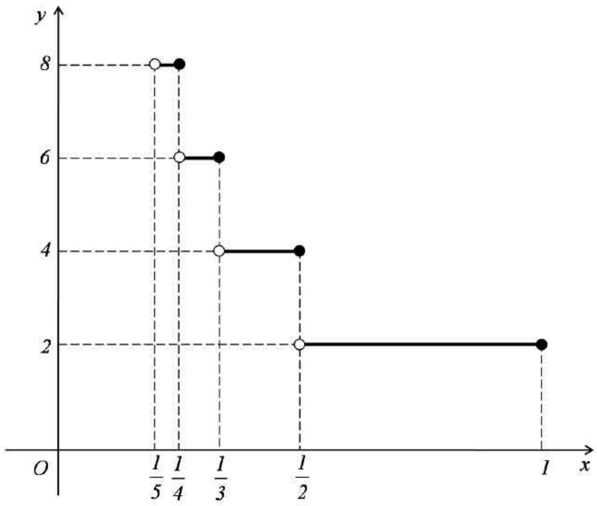
$$\int_a^b [x]dx = \int_a^n (n-1)dx + \sum_{k=n+1}^{m}\int_{k-1}^{k}(k-1)dx + \int_m^b m\,dx$$

<다> 감소수열 $\{a_n\}$ 은 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 와 $a_1 \leq b$ 를 만족한다고 하자. 구간 $(a, b]$ 위의 함수 $y=f(x)$ 에 대하여 정적분 $\int_a^b f(x)dx$ 는 극한값 $\lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^b f(x)dx$ 로 정의한다. 즉,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{a_n}^b f(x)dx$$

<라> 감소수열 $\{b_n\}$ 에 대하여 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ 이 수렴한다.

<마> 다음은 함수 $y=2\left[\dfrac{1}{x}\right]$ 의 그래프 중 일부분이다.



1. 자연수 n 에 대하여 등식 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ 이 성립함을 보이시오.

2. 극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)2k}$ 을 구하시오.

3. 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$ 의 값을 구하시오.

4. 위 3번의 결과를 이용하여, 극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right)$ 을 구하시오.

■ 문항 분석

이 문제는 대학수학 과정에서 벡터공간의 기저와 같은 개념을 알면 너무 간단하게 해결되는 문제이므로 대학수학의 문제라고 판단할 수 있다. 선형대수학 과목에서 행렬의 대각화(고유치와 고유벡터)를 이용하면 행렬을 n제곱한 결과를 얻을 수 있다. 또한 제시문에서 가우스 함수에 대한 적분방법을 제공하기는 했지만 기본적으로 불연속함수의 적분의 고등학교 교육과정에 포함되지 않으므로. 사교육과 같은 교육과정 이외의 경로를 통해서 불연속 함수의 정적분을 접해 본 학생들에게 유리하게 작용할 수 있는 문제라고 판단된다. 개구간 위의 적분을 특이적분으로 정의하는 것과 교대급수의 수렴 판정법은 모두 대학의 미적분학에서 다루는 내용이며, 고등학교의 교육과정을 벗어나는 내용이다.

※별첨 자료 4 : 수리논술 문항과 비슷한 내용이 실린 대학교재 비교

□ 2012년 서울대 정시 논술

제 시 문 1 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

함수 $\log_2$를 정의하려면 우선 지수함수 $h(t)=2^t$과 그 성질을 알아야 한다.

지수함수의 특성 중 하나는, 양수 a가 주어졌을 때, t에 관한 방정식 $2^t=a$의 근이 하나만 존재하는 것이다. 만약 $2^b=a$이면, $b=\log_2(5)$로 표기하고 b를 2를 밑으로 하는 a의 로그라고 부른다. $y=\log_2 x$는 함수이지만 $\log_2 5$의 근삿값을 구하는 것도 쉬운 일이 아니다. 그럼에도 불구하고 우리는 함수 $\log$의 성질을 지수함수 h의 성질로부터 이끌어낼 수 있다.

(나)

우리는 일상생활에서 '기하급수적으로 증가한다' 또는 '지수함수적으로 증가한다' 라는 표현을 자주 사용한다. 이러한 표현은 지수함수가 다항함수보다 매우 빠르게 증가한다는 뜻을 내포하고 있다. 예를 들어, 짧은 기간에는 이자율이 높은 단리 예금이 더 유리할 수도 있겠지만, 많은 경우에는 단리예금보다 복리예금이 유리할 것으로 기대한다. 이러한 선택의 이면에 있는 수학적인 문제를 생각해 보자.

지수함수와 다항함수의 크기를 비교할 때, 우리는 다음 식

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^a}{e^t}=0 \text{ (단, } a\text{는 양의 실수)}$$

을 먼저 떠올리게 된다. 이 식의 의미는 주어진 a가 아무리 크더라도 큰 t에 대해서 e^t은 t^a에 비해 비교할 수 없을 정도로 크다는 것이다.

그렇지만 $a>0$가 주어졌을 때, e^t이 t^a보다 작은 경우도 있다는 점에 조심해야 한다(예: $e^2<2^5$). 따라서 자연스럽게 다음과 같은 미완성 명제를 생각해 볼 수 있다.

미완성 명제: $a>0$일 때, $t>$ (   ) 이면, $e^t>t^a$이다.

위의 괄호 안에는 a에 관한 표현이 들어가야 할 것이다.

(다)

$a>0$가 주어졌을 때, t에 관한 방정식 $e^t=t^a$의 양의 근이 존재하면(논제 1 참조), 그 중 가장 큰 근을 $f(a)$라고 하자. 즉 b가 $e^b=b^a$을 만족시키는 가장 큰 양수이면 $b=f(a)$이다. 그러면 f를 적당한 실수의 구간을 정의역으로 갖는 함수로 인식할 수 있을 것이다(논제 2 참조). 함수 f를 생각하는 이유는 제시문 (나)의 미완성 명제의 괄호 안에 들어갈 최선의 답이 $f(a)$이기 때문이다. 그러나 $f(a)$를 a의 식으로 달리 표현하는 방법을 모를 뿐만 아니라, 계산기 없이는 $f(5)$의 근삿값을 구하는 것도 쉬운 일이 아니다.

[논제 4]

$\lim_{A \to \infty} \int_e^A \left(\frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{f(x)} \right) dx$ 를 찾으시오.

[논제4]의 주어진 식은 대학과정에서 해석학 과목의 특이적분을 의미하는 것이다. 고등학교 과정에서 치환적분 후 극한을 취하면 답을 얻을 수 있지만, 유한 구간 내에서만 적분을 계산하는 고등학교 과정과 달리 특이적분에서는 적분구간을 폐(개)구간에서 무한으로 확장하는 개념이고, 또 부분구간에서 적분의 상계와 상한의 유한값을 전제조건으로 하는 개념으로 고등학교 과정을 벗어난다고 볼 수 있다.

7.3 특이적분

제 5장에서 공부한 리만적분은 피적분함수가 유계닫힌구간에서 정의된 유계함수라는 것이 대전제였다. 그러나 많은 경우 적분구간이 유계가 아닌 구간이거나, 함수가 유계가 아닌 경우에도 적분을 생각할 필요가 많이 생긴다. 이 절에서는 두 가지 경우를 한꺼번에 다루려고 한다.

구간 I 에서 정의된 양함수

$$f : I \to [0, +\infty)$$

가 주어져 있고, 임의의 유계닫힌 부분구간 $J \subset I$ 에 대하여 f 는 J 위에서 리만적분가능하다고 가정하자. 이 때,

$$\int_I f = \sup \left\{ \int_J f : J \subset I,\ J \text{ 는 유계닫힌구간} \right\} \tag{18}$$

이라 정의하자. 만일 $\int_I f$ 가 유한값이면 특이적분 $\int_I f$ 가 수렴한다고 말하고,

$$\int_I f < \infty$$

라 쓰기도 한다. 처음부터 함수 f 의 정의역 I 가 유계닫힌구간이면 f 의 특이적분이 수렴한다는 말이나, f 가 리만적분가능하다는 말이나 마찬가지이다.

몇 가지 구체적인 경우를 살펴보자. 함수 $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ 가 임의의 구간 $[0, A]$ 위에서 리만적분가능하면 그 특이적분은

$$\int_0^\infty f = \lim_{A \to \infty} \int_0^A f \tag{19}$$

6) 역시 복소수열을 다루는 경우

$$\langle a, b \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)\overline{b(n)}$$

라 정의하면 복소내적공간이 된다.

가 성립한다. 역으로, J가 $[0,\infty)$의 유계닫힌부분구간이면 적절한 A에 대하여 $J \subset [0,A]$이므로

$$\int_J f \le \int_0^A f \le \lim_{A\to\infty}\int_0^A f$$

가 성립하고, 따라서

$$\int_0^\infty f \le \lim_{A\to\infty}\int_0^A f$$

임을 알 수 있다. 유계구간에서 정의된 비유계함수에 대해서도 마찬가지 공식을 얻을 수 있다. 예를 들어서 구간 $(0,1]$ 위에서 정의된 양함수 $f:(0,1]\to[0,\infty)$가 임의의 구간 $[\epsilon,1]$ 위에서 리만적분가능하면, 그 특이적분이

$$\int_0^1 f = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 f \tag{20}$$

으로 주어짐을 바로 확인할 수 있다.

보기 1. 구간 $[1,\infty)$ 위에서 정의된 함수

$$f(x)=\frac{1}{x^p},\qquad p>0$$

를 생각하자. 만일 $p=1$이면

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to\infty}\log A = \infty$$

이다. 만일 $p\ne 1$이면 $\int_1^A \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p}(A^{1-p}-1)$이므로

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases}\infty, & 0<p\le 1,\\ \dfrac{1}{p-1}, & p>1\end{cases}$$

- 김성기,김도한,계승혁, 『해석개론』, 서울대학교 출판문화원(2011), 209~210쪽

□ 2012년 고려대 수시 (오전)

제 시 문	다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(다) 그림 3과 같이 좌표공간에 중심이 $\mathrm{B}(t,\,0,\,1)$ 이고 반지름이 1 인 구가 있다. 점 $\mathrm{A}(0,\,0,\,3)$ 에 고정된 점광원에 의해 xy 평면에 그림자가 생긴다. 그림자의 가장자리의 한 점과 A 를 잇는 직선 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x,\,y,\,z)$ 라고 한다.

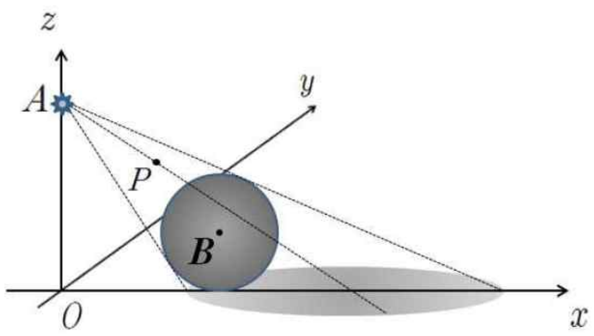


그림 3

제시문 (다) 타원의 넓이를 구하는 공식을 이용하면 쉽게 풀 수 있다. 타원의 넓이를 구하는 방법은 고등학교 과정 내에 있는 삼각치환법을 통해 타원의 넓이를 구할 수 있다. 하지만 교과과정(삼각치환법)에서는 타원의 넓이를 구하는 과정이나 설명은 나와 있지 않고 단순히 공식(πab)으로만 알고 있다. 대학과정의 미적분학 과목에서 치환적분과 극좌표에서의 적분법을 통해 간단히 타원의 넓이를 구할 수 있는 방법을 배우기 때문에 선행학습이 불가피하다고 볼 수 있다.

예제 7.3 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $(a>0,\ b>0)$의 내부의 면적을 구하여라.

풀이 이 타원은 x축과 y축에 대해서 대칭이므로 타원의 면적을 A라면, A는 제1사분면의 면적의 4배이다(그림 7.6).

한편 제1사분면의 그래프의 식이 $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$이므로

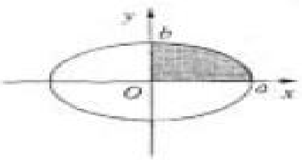
$$A=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

여기서 $x=a\sin\theta$라 두면,

$$dx=a\cos\theta\,d\theta,\ \sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta$$

이므로

$$A=\frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\theta\,d\theta=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$



[그림 7.6]

$$=2ab\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab$$

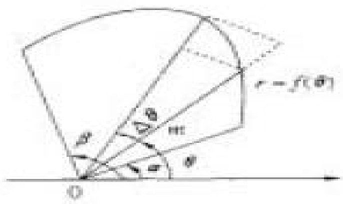
(3) 극좌표에서의 면적

$\alpha\le\theta\le\beta$에서 연속인 곡선 $r=f(\theta)$와 동경 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta(\alpha<\beta)$에 의해서 둘러싸인 영역의 면적을 구해 보자.

곡선 $r=f(\theta)$와 동경 $\theta=\alpha$와 $\theta=\beta$ 사이의 면적을 $A(\theta)$라 두면 $A(\alpha)=0$이 된다. 여기서 동경 θ와 $\theta+\Delta\theta(\Delta\theta>0)$에 의해서 둘러싸인 면적을 ΔA라 하고, 구간 $[\theta,\ \theta+\Delta\theta]$에서의 동경의 최소값과 최대값을 각각 m, M이라 두면

$$\frac{1}{2}m^2\Delta\theta\le\Delta A\le\frac{1}{2}M^2\Delta\theta$$

이므로



[그림 7.7]

-성영욱, 서창호, 한근희, 김찬수 저, 『미적분학』, 교우사(2006) ,200~201쪽

□ 2012년 고려대 수시 (오후)

제 시 문 1	다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 다음의 식을 만족한다.

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_1 \cdot a_n + b_1 \cdot b_n \\ b_{n+1} = a_1 \cdot b_n + b_1 \cdot a_n \end{cases}$$

[논제 I] (필수)

위의 제시문 (가)를 읽고 다음 질문에 답하시오.

(1) $a_n^2 - b_n^2$을 a_1과 b_1을 이용하여 나타내시오.

(2) 2×2 행렬 $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$에 대하여 A_1, A_n, A_{n+1}의 관계식을 구하고 이를 이용하여 A_m, A_n, A_{m+n}의 관계식을 구하시오. (단, m, n은 자연수)

연립 점화식 풀이는 고등학교 과정에서는 두식을 더한 것과 뺀 것으로 치환을 통해 해결할 수 있지만, 대학과정내의 선형대수학에서 고유치, 대각화, 중복도의 개념을 이용한다. 고유치와 중복도를 통해 행렬 A_n이 대각화 가능하다면 간단히 행렬 A_n의 규칙을 찾을 수 있고 나머지 규칙도 자연스럽게 해결할 수 있다. 이런 내용은 고등학교 과정에 벗어나 있고 선행학습을 통해 이 문제를 이해한 학생은 기계적으로 해결할 수 있다고 본다.

보기 4.3.2 다음 행렬을 생각해 보자(실수체 $\mathbb{R}$ 위에서).

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

행렬 A의 고유다항식은

$$\begin{aligned} f(x) = \det(xI-A) &= \begin{vmatrix} x-1 & -4\\ -1 & x-1\end{vmatrix}\\ &= x^2-2x-3=(x+1)(x-3)\end{aligned}$$

이므로 A의 고유치는 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=3$이다.

먼저 고유치 $\lambda_1=-1$에 대응하는 고유공간을 E_1이라고 하면, E_1은 다음 동차 연립일차방정식의 해공간이다.

$$\begin{bmatrix}-2 & -4\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \quad \text{즉} \quad \begin{cases}-2x_1-4x_2=0\\ -x_1-2x_2=0\end{cases}$$

위의 연립방정식은 동차 일차방정식 $x_1+2x_2=0$과 동치이고 그 해는

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

이므로, $E_1=\{t(-2,1)\mid t\in\mathbb{R}\}=\langle(-2,1)\rangle$이다.

또한, 고유치 $\lambda_2=3$에 대응하는 고유공간을 E_2라고 하면, E_2는 다음 동차 연립일차방정식의 해공간이다.

$$\begin{bmatrix}2 & -4\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \quad \text{즉} \quad \begin{cases}2x_1-4x_2=0\\ -x_1+2x_2=0\end{cases}$$

위의 연립방정식은 동차 일차방정식 $-x_1+2x_2=0$과 동치이고 그 해는

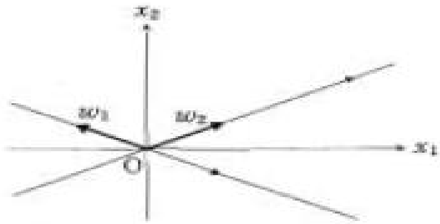
$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

이므로, $E_2=\{t(2,1)\mid t\in\mathbb{R}\}=\langle(2,1)\rangle$이다.

따라서

$w_1 = (-2, 1), \quad w_2 = (2, 1)$

이라고 하면, $E_1 = \langle w_1 \rangle$, $E_2 = \langle w_2 \rangle$ 이고 또



$$P = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

는 정칙행렬이므로 $\mathscr{C} = \{w_1, w_2\}$는 벡터공간 $\mathbb{R}^2$의 기저이다. 그리고

$$L_A(w_1) = \lambda_1 w_1 = -w_1$$
$$L_A(w_2) = \lambda_2 w_2 = \quad 3w_2$$

이므로 정리 3.6.3에 의하여 다음이 성립한다.

$$[L_A]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = D = P^{-1}AP$$

따라서 A는 대각화 가능한 행렬이다. 그리고, 임의의 양의 정수 m에 대하여 다음이 성립한다(정리 3.6.5).

$$D^m = (P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^mP.$$

$$A^m = PD^mP^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^m & 0 \\ 0 & 3^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(-1)^m+3^m}{2} & (-1)^{m+1}+3^m \\ \frac{(-1)^{m+1}+3^m}{4} & \frac{(-1)^m+3^m}{2} \end{bmatrix}$$

정리 4.3.3 체 F 위의 n차의 행렬 A가 대각화 가능한 행렬이기 위한 필요충분조건은 벡터공간 F^n에 A의 n개의 고유벡터로 이루어진 기저 $\mathscr{C} = \{w_1, \cdots, w_n\}$가 존재하는 것이다.

-김웅태, 박승안 저, 선형대수학, 경문사(2010), 209~210쪽

□ 2012년 연세대 수시 논술

제 시 문	다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

함수 $f(x)$는 실수의 집합 $\mathbb{R}$을 정의역과 공역으로 갖는 연속함수이다. 집합 A와 B는 주어진 함수 $f(x)$에 의하여 결정되며 다음과 같이 정의한다.

$A=\{t\in(0,\ 1)\,|$ 어떤 실수 a가 존재하여 부등식 $f(x)\le f(t)+a(x-t)$이 모든 실수 $x\in[0,\ 1]$에 대하여 성립한다. $\}$

$B=\{a\in\mathbb{R}\,|$ 어떤 실수 $t\in(0,\ 1)$가 존재하여 모든 실수 $x\in[0,\ 1]$가 부등식 $f(x)\le f(t)+a(x-t)$을 만족한다. $\}$

제시문에서 오목, 볼록은 고등학교 과정 중에서 '구간 I에 있는 모든 x에 대하여 $f''(x)>0$이면 함수 f의 그래프는 구간 I에서 아래로 볼록하고 $f''(x)<0$이면 함수 f의 그래프는 구간 I에서 위로 볼록하다'라는 단순한 정리와 문제 적용만을 배우고 있다. 하지만 주어진 제시문은 오목, 볼록에 관한 엄밀한 정의를 나타내고 있고, 이 개념을 확실히 알려면 대학 교재에 나와 있는 증명과정을 통해 평균값 정리를 이용하여 원리를 이해해야 한다. 하지만 현실적으로 고교 교과시간 내에 증명과정을 보이기에는 무리가 있기 때문에 선행학습이 필요하다고 생각한다.

3.4 곡선의 오목과 볼록

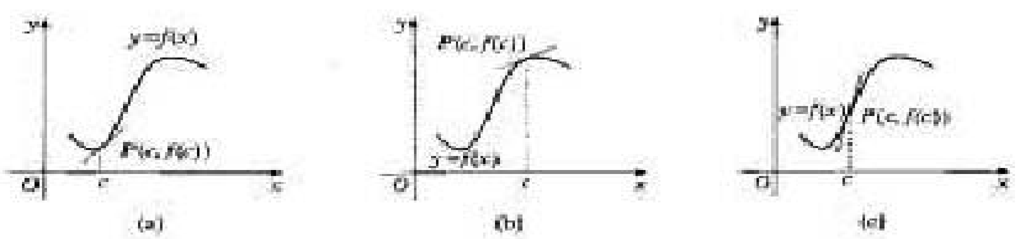
3.3절에서 우리는 이미 주어진 함수의 일계도함수를 이용하여 주어진 함수가 정의역의 어느 특정 구간에서 증가함수인지, 아니면 감소함수인지를 판단할 수 있음을 확인했다. 이 절에서는 주어진 함수의 일계도함수가 아닌 이계도함수를 이용하여 주어진 함수의 그래프가 정의역의 어느 특정 구간에서 아래로 볼록인지, 아니면 위로 볼록인지를 판단할 수 있음을 보일 것이다.

정의 3.4.1 함수 f는 c를 포함하는 개구간 I에서 미분가능하다고 하자. 이때 함수 f에 의해 주어지는 곡선 위의 점 $P(c, f(c))$의 근방에서 곡선의 부분이

(i) 점 $P(c, f(c))$에서의 접선 위쪽에 있으면 f는 점 $P(c, f(c))$에서 위로 오목(concave upward) 또는 **아래로 볼록**(convex downward)하다고 한다(그림 3.7(a) 참조).

(ii) 점 $P(c, f(c))$에서의 접선 아래쪽에 있으면 f는 점 $P(c, f(c))$에서 아래로 오목(concave downward) 또는 **위로 볼록**(convex upward)하다고 한다(그림 3.7(b) 참조).

(iii) 점 $P(c, f(c))$의 어느 한쪽에서는 $P(c, f(c))$에서의 접선 위쪽에 있고 다른 한쪽에서는 그 접선 아래쪽에 있으면 f는 점 $P(c, f(c))$에서 **변곡**(inflect)한다고 하고, 이때의 점 $P(c, f(c))$를 곡선 f의 **변곡점**(point of inflection)이라고 한다(그림 3.7(c) 참조).



[그림 3.7] 곡선의 오목과 볼록

정리 3.4.1 함수 f가 구간 I에서 두 번 미분가능하다고 하자. 이때 구간 I에 있는 모든 x에 대하여

(i) $f''(x) > 0$이면 함수 f의 그래프는 구간 I에서 아래로 볼록하다.

(ii) $f''(x) < 0$이면 함수 f의 그래프는 구간 I에서 위로 볼록하다.

(iii) 적당한 $c \in I$에 대하여 $f''(c) = 0$이면 x가 c를 지날 때 $f''(x)$의 부호가 변하면 함수 f는 점 $(c, f(c))$에서 변곡 한다.

[증명] (i) a를 구간 I 내의 임의의 수라고 하자. 이제 그림 3.8과 같은 곡선 $y = f(x)$ 상의 한 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y = f(a) + f'(a)(x-a)$이므로 임의의 $x \in I$ $(x \neq a)$에 대하여 $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$임을 보이면 구간 I 내의 곡선의 부분이 점 $P(c, f(c))$에서의 접선의 위쪽에 있으므로 정의 3.4.1에 의해 f의 그래프는 구간 I에서 아래로 볼록하다.

[그림 3.8] 아래로 볼록한 그래프

이를 위하여 먼저 $x > a$인 경우를 생각한다. 구간 $[a, x]$에서 f에 평균값의 정리 3.3.4를 적용하면 $a < d < x$이고

$$f(x) - f(a) = f'(d)(x - a) \tag{3.29}$$

인 d를 얻는다. 모든 $x \in I$에 대해 $f''(x) > 0$이므로 정리 3.4.1에 의해 f'는 구간 I에서 증가함수이다. 그런데 $a < d$이므로 $f'(a) < f'(d)$이다. 따라서 $x - a > 0$이므로

$$f(a) + f(x) - f(a) = f(a) + f'(d)(x - a) \tag{3.30}$$

이다. 따라서 식 (3.29)와 (3.30)에 의하여 $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$가 되고 이것이 우리가 증명하고자 하는 것이다. 이제 $x < a$인 경우에는 $f'(d) < f'(a)$이지만 음수 $x - a$를 곱하면 부등식의 방향이 바뀌어 같은 결과를 얻는다.

(ii), (iii)의 증명은 생략한다. □

- 충북대학교편찬위원회 저, 『미적분학』, 교우사(2006), 109~111쪽